Mécanique : conséquence de l'effet de Marée sur la distance Terre-Lune

Extrait du concours commun polytechnique MP 2003 (physique1, partie B)

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

I. Étude de l'effet de marée

1. Quel est le mouvement du référentiel $\mathcal{R}_T$ dans le référentiel de Copernic ?

   Si l'on néglige la présence de la Lune, $\mathcal{R}_T$ est animé d'un mouvement de translation quasi circulaire. En toute rigueur, $\mathcal{R}_T$ n'est pas galiléen.

2. Expression de la quantité d'accélération dans $\mathcal{R}_T$.

   La résultante des forces a pour expression : $\sum \vec{F} = \vec{F} + m\vec{G_T}(P) + m\vec{G_L}(P) + m\vec{G_S}(P)$. $\mathcal{R}_T$ étant animé d'un mouvement de translation par rapport à $\mathcal{R}$, il n'apparaît pas de force de Coriolis : les forces d'inertie dans $\mathcal{R}_T$ se limitent à la seule force d'entraînement. La relation fondamentale de la dynamique dans $\mathcal{R}_T$ s'écrit donc : $m\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_T} = m\vec{G_T}(P) + m\vec{G_L}(P) + m\vec{G_S}(P) - m\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}}$

3.a) Exprimer $\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}}$. Pour chaque particule A_i, nous avons : $\vec{F_i} = m_i\vec{G_T}(A_i) + m_i\vec{G_L}(A_i) + m_i\vec{G_S}(A_i)$.

Soit $\vec{F_i} = m_i\vec{G_T}(A_i) + m_i\left(\vec{G_L}(T) + \left(\vec{TA_i}\cdot\vec{grad}\right)\vec{G_L}\right) + m_i\left(\vec{G_S}(T) + \left(\vec{TA_i}\cdot\vec{grad}\right)\vec{G_S}\right)$.

La Terre étant présumée de symétrie sphérique, nous avons : $\sum m_i\vec{G_T}(A_i) = 0$. Il reste donc :

$$\sum\vec{F_i} = \sum\left(m_i\left(\vec{G_L}(T)+\vec{G_S}(T)\right) + m_i\left(\vec{G_L}(T) + \left(\vec{TA_i}\cdot\vec{grad}\right)\vec{G_L}\right) + m_i\left(\vec{G_S}(T) + \left(\vec{TA_i}\cdot\vec{grad}\right)\vec{G_S}\right)\right)$$

$$= \left(\sum m_i\right)\left(\vec{G_L}(T)+\vec{G_S}(T)\right) + \sum\left(m_i\vec{TA_i}\cdot\vec{grad}\right)\left(\vec{G_L}(T)+\vec{G_S}(T)\right)$$

Étant donné la relation $\sum\left(m_i\vec{TA_i}\right) = \vec{0}$, l'opérateur $\sum\left(m_i\vec{TA_i}\cdot\vec{grad}\right)$ est identiquement nul et l'on en déduit : $\sum\vec{F_i} = m_T\left(\vec{G_L}(T)+\vec{G_S}(T)\right)$. Finalement donc :

$$\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}} = \vec{G_L}(T)+\vec{G_S}(T)$$

3.b) Montrer que l'on peut écrire : $m\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_T} = m\vec{G_T}(P) + m\vec{C_L}(P) + m\vec{C_S}(P)$

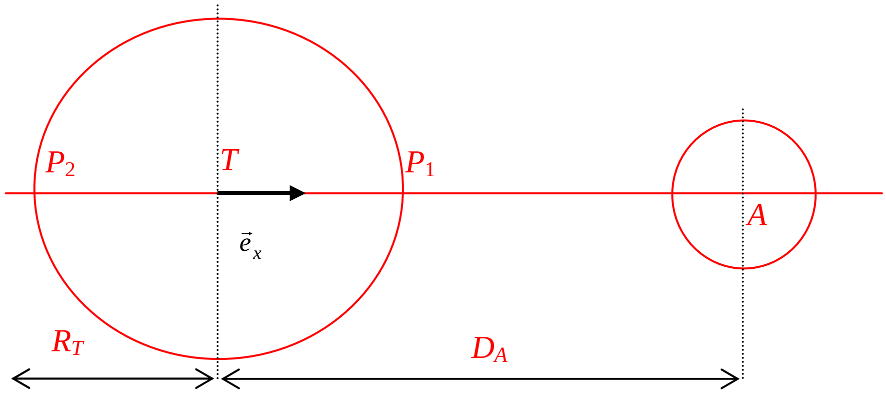
Partant de la relation $m\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_T} = m\vec{G_T}(P) + m\vec{G_L}(P) + m\vec{G_S}(P) - m\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}}$ démontrée à la question 2, nous en déduisons : $m\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_T} = m\vec{G_T}(P) + m\vec{G_L}(P) + m\vec{G_S}(P) - m\left(\vec{G_L}(T)+\vec{G_S}(T)\right)$, soit : $m\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_T} = m\vec{G_T}(P) + m\left(\vec{G_L}(P)-\vec{G_L}(T)\right) + m\left(\vec{G_S}(P)-\vec{G_S}(T)\right)$.

En posant $\vec{C_L}(P) = \vec{G_L}(P)-\vec{G_L}(T)$ et $\vec{C_S}(P) = \vec{G_S}(P)-\vec{G_S}(T)$, nous obtenons la relation attendue :

$$m\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_T} = m\vec{G_T}(P) + m\vec{C_L}(P) + m\vec{C_S}(P)$$

4. Évaluer les champs de marée $\overrightarrow{C_A}(P_1)$ et $\overrightarrow{C_A}(P_2)$ en considérant que $R_T \ll D_A$.

Nous avons $\overrightarrow{G_A}(T) = \dfrac{Gm_A}{D_A^{\ 2}}\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{G_A}(P_1) = \dfrac{Gm_A}{(D_A - R_T)^2}\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{G_A}(P_2) = \dfrac{Gm_A}{(D_A + R_T)^2}\overrightarrow{e_x}$



Nous en déduisons :

$$\begin{cases} \overrightarrow{C_A}(P_1) = \overrightarrow{G_A}(P_1) - \overrightarrow{G_A}(T) = \left(\dfrac{Gm_A}{(D_A - R_T)^2} - \dfrac{Gm_A}{D_A^{\ 2}}\right)\overrightarrow{e_x} = \left(\left(1 - \dfrac{R_T}{D_A}\right)^{-2} - 1\right)\dfrac{Gm_A}{D_A^{\ 2}}\overrightarrow{e_x} \approx +\dfrac{2Gm_A R_T}{D_A^{\ 3}}\overrightarrow{e_x} \\ \overrightarrow{C_A}(P_2) = \overrightarrow{G_A}(P_2) - \overrightarrow{G_A}(T) = \left(\dfrac{Gm_A}{(D_A + R_T)^2} - \dfrac{Gm_A}{D_A^{\ 2}}\right)\overrightarrow{e_x} = \left(\left(1 + \dfrac{R_T}{D_A}\right)^{-2} - 1\right)\dfrac{Gm_A}{D_A^{\ 2}}\overrightarrow{e_x} \approx -\dfrac{2Gm_A R_T}{D_A^{\ 3}}\overrightarrow{e_x} \end{cases}$$

Applications numériques : $\dfrac{2Gm_L R_T}{D_L^{\ 3}} = 1{,}10 \times 10^{-6}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ et $\dfrac{2Gm_S R_T}{D_S^{\ 3}} = 0{,}50 \times 10^{-6}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

Le champ de marée dû au Soleil est deux fois plus faible que le champ de marée dû à la Lune.

II- Trajectoire de la Lune

1.a) Montrer que $\overrightarrow{L^*}(T,L)$ se conserve.

Le système {Terre, Lune} est considéré comme un système isolé. Le théorème du moment cinétique exprimé dans le référentiel barycentrique s'écrit donc :

$$\frac{\overrightarrow{dL^*}}{dt}(T,L) = \overrightarrow{M^*} = \vec{0} \qquad \text{ou encore} \qquad \overrightarrow{L^*}(T,L) = \overrightarrow{C^{te}}\text{, CQFD}$$

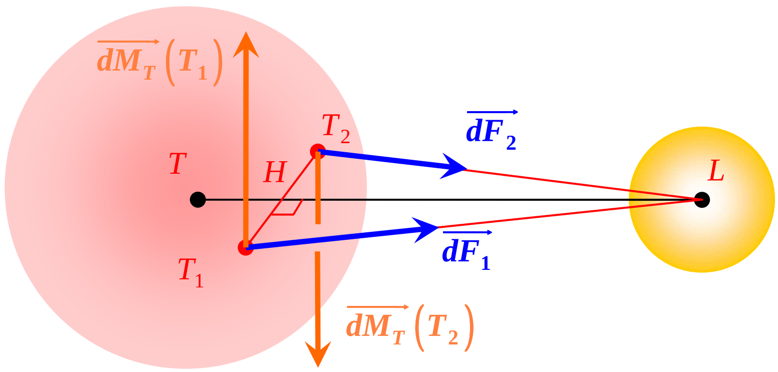
1.b) Montrer que $\overrightarrow{\Omega_T}$ et $\overrightarrow{\Omega_L}$ sont invariants.

Considérons par exemple l'action de la Lune sur la Terre. La Lune étant de symétrie sphérique, son champ de gravitation est un champ central Newtonien identique au champ que créerait une masse m_L placée en L. Considérons une même masse dm en deux points T_1 et T_2 de la Terre symétriques par rapport au plan $\left(L, \overrightarrow{\Omega_T}\right)$ et exprimons les moments en T, centre de la Terre, des forces centrales de gravitation $\overrightarrow{dF_1} = \dfrac{GM_L}{T_1L^3}dm\overrightarrow{T_1L}$ et $\overrightarrow{dF_2} = \dfrac{GM_L}{T_2L^3}dm\overrightarrow{T_2L}$ exercées par la Lune :

$$\begin{cases} \overrightarrow{dM_T}(T_1) = \overrightarrow{TT_1} \wedge \dfrac{GM_L}{T_1L^3} dm \overrightarrow{T_1L} = \overrightarrow{TT_1} \wedge \dfrac{GM_L}{T_1L^3} dm \left(\overrightarrow{TL} - \overrightarrow{TT_1}\right) = \overrightarrow{HT_1} \wedge \dfrac{GM_L}{T_1L^3} dm \overrightarrow{TL} \\ \overrightarrow{dM_T}(T_2) = \overrightarrow{TT_2} \wedge \dfrac{GM_L}{T_2L^3} dm \overrightarrow{T_2L} = \overrightarrow{TT_2} \wedge \dfrac{GM_L}{T_2L^3} dm \left(\overrightarrow{TL} - \overrightarrow{TT_2}\right) = \overrightarrow{HT_2} \wedge \dfrac{GM_L}{T_2L^3} dm \overrightarrow{TL} \end{cases}$$

Avec $\overrightarrow{HT_1} = -\overrightarrow{HT_2}$ et $T_1L = T_2L$, nous en déduisons que $\overrightarrow{dM_T}(T_1) = -\overrightarrow{dM_T}(T_2)$

Cette propriété, étendue à l'ensemble des couples de points $\{T_1, T_2\}$ implique que le moment résultant en T des forces exercées par la Lune sur la Terre est nul.



Par application à la Terre du théorème du moment cinétique barycentrique (en T) dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}^*$, nous en déduisons que $\overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}^*} = \overrightarrow{C^{te}}$. Il nous reste à appliquer le théorème de König à la Terre pour exprimer la relation entre $\overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}^*}$ et $\overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T}$:

$$\overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}^*} = \overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T} + \overrightarrow{TT} \wedge m_T \overrightarrow{v_{T/\mathcal{R}^*}} = \overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T}$$

Ainsi, avons-nous démontré que le moment cinétique de la Terre au centre de la Terre, dans le référentiel $\mathcal{R}_T$ est constant. Il en est de même du moment cinétique de la Lune au centre de la Lune, dans le référentiel $\mathcal{R}_L$: $\overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T} = \overrightarrow{C^{te}}$ et $\overrightarrow{L_L}(L)_{/\mathcal{R}_L} = \overrightarrow{C^{te}}$

Des relations de définition $\overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T} = J_T \overrightarrow{\Omega_T}$ et $\overrightarrow{L_L}(L)_{/\mathcal{R}_L} = J_L \overrightarrow{\Omega_L}$ nous déduisons que les vitesses angulaires de rotation de la Terre sur elle-même et de la Lune sur elle-même sont conservatives :

$$\overrightarrow{\Omega_T} = \overrightarrow{C^{te}} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\Omega_L} = \overrightarrow{C^{te}}.$$

2.a) Montrer que $\overrightarrow{L_C^*}(T) = \overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T} + \overrightarrow{CT} \wedge m_T \overrightarrow{v_{T/\mathcal{R}^*}}$

D'après la relation des moments dans $\mathcal{R}^*$: $\overrightarrow{L_C^*}(T) = \overrightarrow{L_C}(T)_{/\mathcal{R}^*} = \overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}^*} + \overrightarrow{CT} \wedge m_T \overrightarrow{v_{T/\mathcal{R}^*}}$. Nous avons déjà montré à la question précédente que $\overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T} = \overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}^*}$ et nous obtenons donc la relation demandée :

$$\overrightarrow{L_C^*}(T) = \overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T} + \overrightarrow{CT} \wedge m_T \overrightarrow{v_{T/\mathcal{R}^*}}$$

2.b) Donner la relation analogue pour $\overrightarrow{L_C^*}(L)$: $\overrightarrow{L_C^*}(L) = \overrightarrow{L_L}(L)_{/\mathcal{R}_L} + \overrightarrow{CL} \wedge m_L \overrightarrow{v_{L/\mathcal{R}^*}}$

2.c) En déduire que $\overrightarrow{L^*}(T,L)$ peut se mettre sous la forme $\overrightarrow{L^*}(T,L) = \overrightarrow{L^*_{orb}} + \overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T} + \overrightarrow{L_L}(L)_{/\mathcal{R}_L}$

Appliquons les résultats démontrés à la question précédente :

$$\overrightarrow{L^*}(T,L) = \overrightarrow{L^*_C}(T) + \overrightarrow{L^*_C}(L) = \overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T} + \overrightarrow{CT} \wedge m_T \overrightarrow{v_{T/\mathcal{R}^*}} + \overrightarrow{L_L}(L)_{/\mathcal{R}_L} + \overrightarrow{CL} \wedge m_L \overrightarrow{v_{L/\mathcal{R}^*}}$$

En posant $\overrightarrow{L^*_{orb}} = \overrightarrow{CT} \wedge m_T \overrightarrow{v_{T/\mathcal{R}^*}} + \overrightarrow{CL} \wedge m_L \overrightarrow{v_{L/\mathcal{R}^*}}$, moment cinétique orbital barycentrique du système Terre-Lune, nous obtenons la relation attendue : $\overrightarrow{L^*}(T,L) = \overrightarrow{L^*_{orb}} + \overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T} + \overrightarrow{L_L}(L)_{/\mathcal{R}_L}$

3.a) Calculer les vecteurs $\overrightarrow{CL}$ et $\overrightarrow{CT}$ et en déduire les vitesses $\overrightarrow{v_{T/\mathcal{R}^*}}$ et $\overrightarrow{v_{L/\mathcal{R}^*}}$

Par définition du centre de masse, nous avons $m_L \overrightarrow{CL} + m_T \overrightarrow{CT} = \vec{0}$, d'où l'on déduit :

$$\overrightarrow{CT} = -\frac{m_T}{m_T + m_L}\overrightarrow{TL} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CL} = \frac{m_T}{m_T + m_L}\overrightarrow{TL}$$

Nous avons donc : $\overrightarrow{v_{L/\mathcal{R}^*}} = \dfrac{d\overrightarrow{CL}}{dt} = \dfrac{m_T}{m_T + m_L}\dfrac{d\overrightarrow{TL}}{dt} = \dfrac{m_T}{m_T + m_L}\dfrac{d\overrightarrow{CM}}{dt} = \dfrac{m_T}{m_T + m_L}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}^*}} = \dfrac{\mu}{m_L}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}^*}}$

Et de même : $\overrightarrow{v_{T/\mathcal{R}^*}} = -\dfrac{m_L}{m_T + m_L}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}^*}} = -\dfrac{\mu}{m_T}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}^*}}$

3.b) Écrire la relation fondamentale de la dynamique dans $\mathcal{R}^*$

Pour la Lune : $-\dfrac{Gm_L m_T}{TL^3}\overrightarrow{TL} = m_L \dfrac{d\overrightarrow{v_{L/\mathcal{R}^*}}}{dt} = -\dfrac{Gm_L m_T}{CM^3}\overrightarrow{CM} = +\mu \dfrac{d\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}^*}}}{dt}$

Pour la Terre : $+\dfrac{Gm_L m_T}{TL^3}\overrightarrow{TL} = m_T \dfrac{d\overrightarrow{v_{T/\mathcal{R}^*}}}{dt} = +\dfrac{Gm_L m_T}{CM^3}\overrightarrow{CM} = -\mu \dfrac{d\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}^*}}}{dt}$

Dans les deux cas, cela revient à écrire que la Lune fictive obéit dans $\mathcal{R}^*$ à la seconde loi de Newton, soumise à la force exercée par la Terre sur la Lune.

4.a) En exprimant $\overrightarrow{L^*_{orb}}$, montrer que le mouvement de la particule fictive est plan

$$\overrightarrow{L^*_{orb}} = \overrightarrow{CT} \wedge m_T \overrightarrow{v_{T/\mathcal{R}^*}} + \overrightarrow{CL} \wedge m_L \overrightarrow{v_{L/\mathcal{R}^*}} = -\frac{m_T}{m_T + m_L}\overrightarrow{CM} \wedge \left(-\mu \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}^*}}\right) + \frac{m_L}{m_T + m_L}\overrightarrow{CM} \wedge \left(+\mu \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}^*}}\right)$$

$$= \overrightarrow{CM} \wedge \mu \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}^*}}$$

$\overrightarrow{L^*_{orb}}$ étant une constante du mouvement toujours orthogonale à la trajectoire, nous en déduisons que la trajectoire de la particule fictive est plane.

4.b) Approximation $m_T \gg m_L$.

Le point C est alors confondu avec le centre T de la Terre et M avec le centre L de la Lune. Le référentiel $\mathcal{R}^*$ est alors confondu avec le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$.

5.a) Établir l'équation de la trajectoire.

Posons $u = \dfrac{1}{r}$. La constance du moment cinétique s'écrit $C = \dfrac{L}{m_L} = r^2 \dfrac{d\theta}{dt}$, soit : $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{C}{r^2} = Cu^2$

Nous avons donc : $\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = Cu^2 \dfrac{dr}{d\theta} = Cu^2 \dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{1}{u}\right) = -C\dfrac{du}{d\theta} \\ \dfrac{d^2r}{dt^2} = -C\dfrac{d^2u}{d\theta^2}\dfrac{d\theta}{dt} = -C^2u^2\dfrac{d^2u}{d\theta^2} \end{cases}$

Exprimons l'accélération centrale en fonction de u : $a_r = \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 = -C^2u^2\dfrac{d^2u}{d\theta^2} - C^2u^3$

Et appliquons le principe fondamental de la dynamique : $-Gm_Tm_Lu^2 = -m_LC^2u^2\dfrac{d^2u}{d\theta^2} - m_LC^2u^3$

Nous obtenons ainsi l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $u(\theta)$:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{Gm_T}{C^2} = \frac{Gm_Tm_L{}^2}{L^2}$$

Posons le second membre constant égal à $1/p$. Nous avons affaire à une équation différentielle du second ordre avec second membre.

Nous identifions une solution particulière $u = \dfrac{1}{p} = \dfrac{Gm_Tm_L{}^2}{L^2}$ de l'équation complète.

La solution générale de l'équation sans second membre s'écrit $u = K\cos(\theta - \theta_0)$ où K et θ_0 sont deux constantes réelles quelconques.

La solution générale de l'équation complète est donc de la forme $u = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + K\cos(\theta - \theta_0)$ où encore, en faisant le choix particulier d'un axe polaire dirigé vers le périgée de l'orbite :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

La trajectoire est elliptique. p est le *paramètre* de l'orbite. E est l'excentricité. Le moment cinétique massique a alors pour expression : $\dfrac{L}{m_L} = \sqrt{Gm_Tp}$

5.b) Déterminer p et e.

Le périgée et, respectivement, l'apogée ont pour expression $r_p = \dfrac{p}{1+e}$ et, respectivement, $r_a = \dfrac{p}{1-e}$.

Nous en déduisons : $e = \dfrac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$ et $p = \dfrac{2r_ar_p}{r_a + r_p}$

Applications numériques : $e = 0{,}0547$ et $p = 382{,}9 \times 10^3$ km

5.c) Montrer que la trajectoire de la Lune peut-être assimilée à un cercle.

Effectivement, l'excentricité est peu importante et l'on peut avec une approximation raisonnable considérer que la Lune a une trajectoire circulaire de rayon $D_L = p$. Il ne faudra cependant pas faire de calcul de distance à mieux que 10% près.

Le moment cinétique a alors pour expression $L = m_L\sqrt{Gm_TD_L} = m_L\omega_LD_L{}^2$ et nous en déduisons :

$$\omega_L = \sqrt{\frac{Gm_T}{D_L^{\ 3}}} \qquad \text{et} \qquad v_L = \omega_L D_L = \sqrt{\frac{Gm_T}{D_L}}$$

Applications numériques : $\omega_L = 2{,}65\times10^{-6}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $v_L = 1{,}02\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$

6.a) Évaluer et comparer les différents moments cinétiques.

$$L^*_{orb} = D_L m_L v_L = 2{,}87\times10^{34}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$$

$$L_T(T)_{/\mathcal{R}_T} = \frac{2}{5}m_T R_T^{\ 2}\Omega_T = 0{,}708\times10^{34}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1} \approx \frac{1}{4}L^*_{orb}$$

$$L_L(L)_{/\mathcal{R}_L} = \frac{2}{5}m_L R_L^{\ 2}\Omega_L = 2{,}39\times10^{29}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1} \approx 0{,}8\times10^{-5}L^*_{orb}$$

Le moment cinétique de rotation propre de la Terre est du même ordre de grandeur que le moment cinétique orbital. Par contre, le moment cinétique de rotation propre de la Lune est d'un ordre de grandeur très inférieur.

6.b) Expression simplifiée du moment cinétique du système Terre-Lune.

$$\overrightarrow{L^*_{orb}} \approx D_L m_L v_L \overrightarrow{e_z} \approx m_L\sqrt{Gm_T D_L}\ \overrightarrow{e_z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T} = J_T\Omega_T\overrightarrow{e_z}$$

Nous avons montré que $\overrightarrow{L^*}(T,L) = \overrightarrow{L^*_{orb}} + \overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T} + \overrightarrow{L_L}(L)_{/\mathcal{R}_L} \approx \overrightarrow{L^*_{orb}} + \overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T}$

Et donc : $\overrightarrow{L^*}(T,L) \approx \left(m_L\sqrt{Gm_T D_L} + J_T\Omega_T\right)\overrightarrow{e_z}$ CQFD

III- Éloignement de la Lune

1. Masse des bourrelets d'eau.

$m_b = \left(\frac{4}{3}\pi ab^2 - \frac{4}{3}\pi R_T^{\ 3}\right)\rho$. Avec $b = R_T$ et $a = R_T + h$, cela donne : $m_b = \frac{4}{3}\pi R_T^{\ 2}h\rho$

Application numérique : $m_b = 8{,}50\times10^{16}\ \text{kg}$

2. Exprimer le moment des forces exercées par la Lune sur l'ensemble {Terre+bourellets}

Il suffit pour cela de reporter les expressions déterminées dans la première partie.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_1} = \overrightarrow{TP_1}\wedge\overrightarrow{F_1} = \frac{1}{2}m_b\overrightarrow{TP_1}\wedge\overrightarrow{C_L}(P_1) = \frac{1}{2}m_b\overrightarrow{TP_1}\wedge\left(\overrightarrow{G_L}(P_1) - \overrightarrow{G_L}(T)\right)$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_2} = \overrightarrow{TP_2}\wedge\overrightarrow{F_2} = \frac{1}{2}m_b\overrightarrow{TP_2}\wedge\overrightarrow{C_L}(P_2) = \frac{1}{2}m_b\overrightarrow{TP_2}\wedge\left(\overrightarrow{G_L}(P_2) - \overrightarrow{G_L}(T)\right)$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_1} + \overrightarrow{\mathcal{M}_2} = \frac{1}{2}m_b\overrightarrow{TP_1}\wedge\left(\overrightarrow{G_L}(P_1) - \overrightarrow{G_L}(P_2)\right)$$

3.a) Déterminer $\frac{d\Omega_T}{dt}$

Projetons sur $\overrightarrow{e_z}$: $M_z = \frac{dL}{dt} = \frac{d(J_T\Omega_T)}{dt} = J_T\frac{d\Omega_T}{dt} = -\frac{A\sin(2\alpha)}{D_L^3}$

Finalement : $\dfrac{d\Omega_T}{dt} = -\dfrac{A\sin(2\alpha)}{J_T D_L^3} = -\dfrac{3}{2}\dfrac{Gm_b m_L (R+h)^2 \sin(2\alpha)}{J_T D_L^3}$

Application numérique : $\dfrac{d\Omega_T}{dt} = -4{,}64\times10^{-22}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$

3.b) Variation de la durée du jour terrestre

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2\pi}{\Omega_T}\right) = -\frac{2\pi}{\Omega_T^2}\frac{d\Omega_T}{dt}$$

Application numérique : $\dfrac{dT}{dt} = 5{,}48\times10^{-13}\text{s}\cdot\text{s}^{-1} = 1{,}73\times10^{-5}\text{s}\cdot\text{an}^{-1}$

Cette valeur est effectivement du même ordre de grandeur que la valeur observée de $1{,}65\times10^{-5}\text{s}\cdot\text{an}^{-1}$.

3.c) Variation de la distance Terre-Lune

Le moment cinétique $\overrightarrow{L^*}(T,\ L) \approx \left(m_L\sqrt{Gm_T D_L} + J_T\Omega_T\right)\overrightarrow{e_z}$ est constant, donc $m_L\sqrt{Gm_T D_L} + J_T\Omega_T = C^{te}$.

Dérivons cette expression : $\dfrac{d\left(m_L\sqrt{Gm_T D_L} + J_T\Omega_T\right)}{dt} = \dfrac{1}{2\sqrt{D_L}} m_L\sqrt{Gm_T}\dfrac{dD_L}{dt} + J_T\dfrac{d\Omega_T}{dt} = 0$

Nous en déduisons : $\dfrac{dD_L}{dt} = -\dfrac{4}{5}\sqrt{\dfrac{m_T D_L}{G}}\dfrac{R_T^2}{m_L}\dfrac{d\Omega_T}{dt}$

Application numérique : $\dfrac{dD_L}{dt} = 1{,}204\times10^{-9}\ \ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 3{,}8\ \text{cm}\cdot\text{an}^{-1}$. Le modèle, bien que sommaire, permet d'approcher la réalité à 10% près.